

FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES



Exercice1

I – On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

- 1) Déterminer D_f le domaine de définition de f et D_c le domaine de continuité de f
- 2) Montrer que f est strictement décroissante sur D_f
- 3) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera
- 4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

II – Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ on pose : $g(x) = f(\tan^2 x)$

- 1) a) Montrer que : $g(x) = \sqrt{\cos 2x}$
 b) Montrer que g est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur un intervalle K que l'on déterminera
- 2) a) Calculer : $g^{-1}(0)$
 b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(x)}{x}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(1)}{x - 1}$

Exercice2

Soit f la fonction définie sur $] -1; 1[$ par : $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

- 1) Montrer que f est continue sur $] -1; 1[$
- 2) Etudier le sens de variation de f sur $] -1; 1[$
- 3) Montrer que f est une bijection de $] -1; 1[$ sur un intervalle J que l'on déterminera
 et montrer que : $\forall x \in J, \quad f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$
- 4) Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ admet une solution unique α et que $\alpha < \frac{1}{3}$

1) Soit h la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ par : $h(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

- a) Montrer que h est continue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES



Déterminer a pour que h soit continue à droite de $\frac{\pi}{2}$

Exercice3 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par : $f(x) = \cos x$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} et déterminer $D_{f^{-1}}$

2) a) Montrer que : $\forall x \in D_{f^{-1}}; f^{-1}(-x) = \pi - f^{-1}(x)$

b) Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f^{-1}(x)}{x} = -\infty$ et déduire $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{f^{-1}(x)}{x+1}$

3) Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = 4x^3 - 3x$

a) Donner le tableau de variation de φ

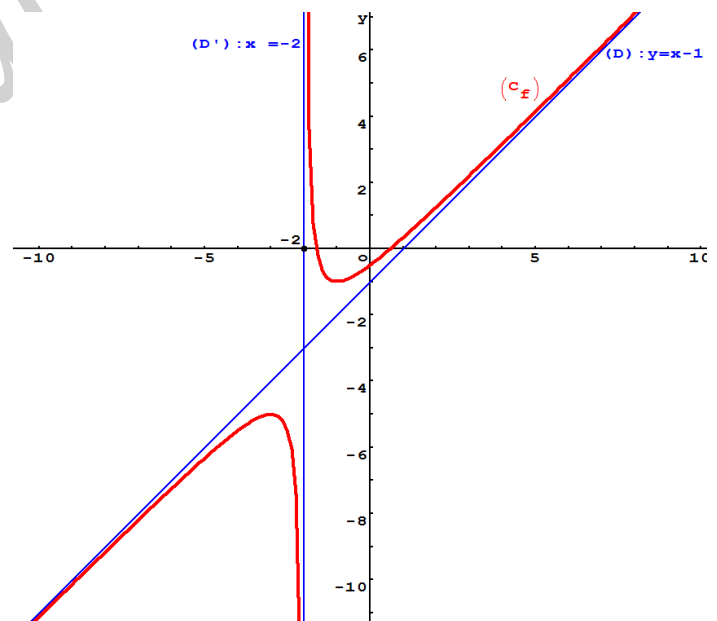
b) Déterminer : $\varphi([-1; 1])$

c) On pose : $h(x) = f^{-1} \circ \varphi(x)$

Déterminer D_h et exprimer $h(x)$ en fonction de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$

Exercice5 La courbe ci-dessous représente une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R} - \{-2\}$

Les droites : $(D): y = x - 1$ et $(D'): x = -2$ sont des asymptotes à (C_f)



1) Donner le tableau de variation de f

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x-3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 4]$$

3) Calculer : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f \circ f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ f(x)$

4) a) Montrer que $f \circ f$ est strictement croissante sur $] -2; -1]$

b) Déterminer $f \circ f([-2; -1])$

5) La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses α et β tels que $0 < \alpha < 1$ et $-2 < \beta < -1$

a) Montrer que l'équation $f(x) = \beta$ n'admet pas de solutions dans $] -2, +\infty[$ Représenter sur l'axe des abscisses les solutions de l'équation $f \circ f(x) = 0$